12 Volumen de cuerpos geométricos

INTRODUCCIÓN

Como complemento al estudio del Sistema Métrico Decimal, iniciamos esta unidad con el concepto de volumen y sus respectivas unidades de medida. De igual manera, y recordando las unidades de capacidad y masa, establecemos las relaciones entre estas unidades y las de volumen.

Partiendo del estudio de los cuerpos geométricos realizado en temas anteriores, se introduce el concepto de volumen de los diferentes poliedros como el producto del área de la base por la altura. Iniciamos este estudio con el ortoedro y el cubo (caso particular del primero), siendo suficiente para los alumnos de este nivel conocer y calcular el volumen del cilindro y la pirámide.

También en esta unidad se recomienda el uso de diversos materiales específicos en Geometría, en concreto los cuerpos geométricos transparentes, dotados de orificios para llenarlos de arena o agua y efectuar las relaciones entre volúmenes de los diferentes poliedros. Será útil la construcción del metro cúbico mediante varillas de PVC y vértices de unión, así como la manipulación del decímetro cúbico descomponible.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- El *volumen* de un cuerpo es la cantidad de espacio que ocupa.
- El *metro cúbico* (m^3) es la unidad principal de volumen. El paso de una unidad de volumen a otra se efectúa multiplicando o dividiendo por 1.000.
- El *litro* es la unidad principal de capacidad. El *kilogramo* y el *gramo* son las unidades principales de masa. Otras unidades son la tonelada y el quintal métrico.
- La conversión de estas *unidades de capacidad y masa* se efectúa multiplicando o dividiendo por 10.
- Mediante *equivalencias* establecemos relaciones entre las diferentes unidades de volumen, capacidad y masa.
- El volumen total de cuerpos geométricos, como el *ortoedro* y el *cubo*, se halla multiplicando sus tres dimensiones: largo, ancho y alto.
- De igual manera, el volumen del *cilindro* y la *pirámide* se halla multiplicando el área de las bases por su altura.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Comprender el concepto de volumen de los cuerpos.	• Concepto de volumen. • Unidades de volumen: múltiplos y submúltiplos.	• Identificación de unidades cúbicas. • Conversión de unidades de volumen aplicando las equivalencias.
2. Relacionar las unidades de volumen, capacidad y masa.	• Unidades de masa y capacidad: múltiplos y submúltiplos. • Equivalencias entre las unidades de volumen, capacidad y masa.	• Conversión de unidades de capacidad y masa mediante equivalencias. • Identificación de las relaciones entre unidades de volumen, capacidad y masa.
3. Calcular el volumen de algunos cuerpos geométricos.	• Volumen del ortoedro. • Volumen del cubo. • Volumen del cilindro y la pirámide.	• Cálculo del volumen del ortoedro y el cubo. • Cálculo del volumen del cilindro y la pirámide. • Resolución de problemas.

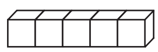
12 OBJETIVO 1
COMPRENDER EL CONCEPTO DE VOLUMEN DE LOS CUERPOS

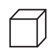
NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

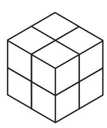
CONCEPTO DE VOLUMEN

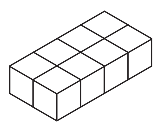
El volumen de un cuerpo es la cantidad de espacio que ocupa. Para medir el volumen de un cuerpo, lo comparamos con el volumen de otro cuerpo elegido como unidad, y determinamos el número de unidades que contiene.

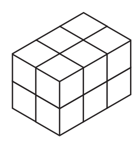
EJEMPLO

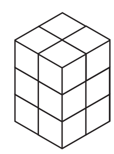
Si tomamos como unidad el cubo  (unidad cúbica), podemos afirmar que la figura  tiene como volumen 5 unidades cúbicas.

1 **Tomando como unidad el cubo , calcula el volumen de las figuras.**

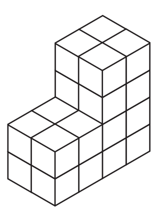
a) 

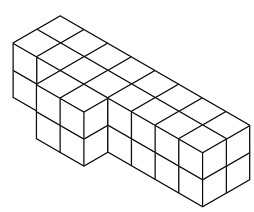
b) 

c) 

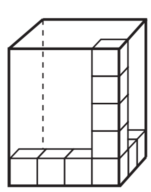
d) 

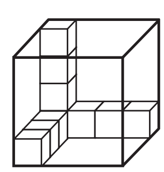
2 **Haz lo mismo que en el ejercicio anterior con estas figuras.**

a) 

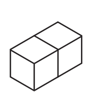
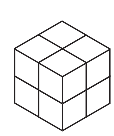
b) 

3 **Calcula los cubos que caben en cada una de las siguientes figuras.**

a) 

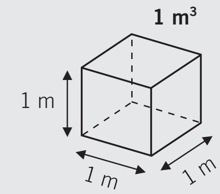
b) 

4 **Continúa y dibuja la serie de figuras en función de las unidades cúbicas que forman.**

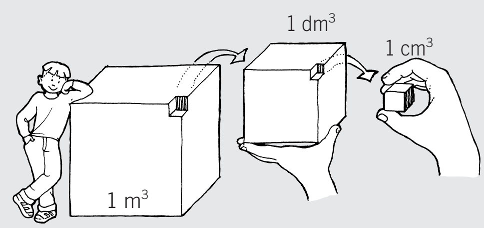
FIGURA					
N.º DE CUBOS	1	2	4	8	

UNIDADES DE VOLUMEN

- El **metro cúbico** es la unidad principal de volumen. Se escribe **m³**. Es el volumen de un cubo que tiene 1 metro de arista.



- Los **múltiplos del m³** son cubos que tienen de arista múltiplos del metro:
  – 1 decámetro cúbico (**dam³**) es un cubo que tiene 1 dam de arista.
  – 1 hectómetro cúbico (**hm³**) es un cubo que tiene 1 hm de arista.
  – 1 kilómetro cúbico (**km³**) es un cubo que tiene 1 km de arista.
- Los **submúltiplos del m³** son cubos que tienen de arista submúltiplos del metro:
  – 1 decímetro cúbico (**dm³**) es un cubo que tiene 1 dm de arista.
  – 1 centímetro cúbico (**cm³**) es un cubo que tiene 1 cm de arista.
  – 1 milímetro cúbico (**mm³**) es un cubo que tiene 1 mm de arista.

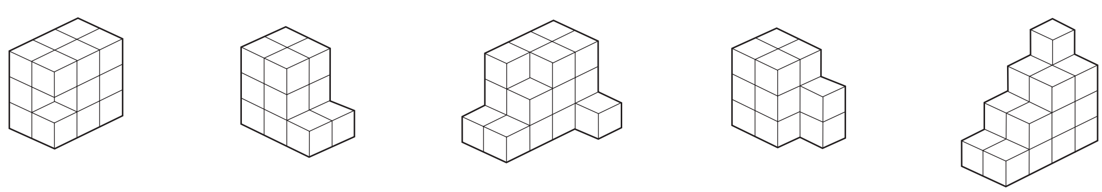


- Cada unidad es 1.000 veces mayor que la inmediata inferior y 1.000 veces menor que la inmediata superior.

$$\text{km}^3 \xrightarrow{\cdot 1.000} \text{hm}^3 \xrightarrow{\cdot 1.000} \text{dam}^3 \xrightarrow{\cdot 1.000} \mathbf{m^3} \xrightarrow{\cdot 1.000} \text{dm}^3 \xrightarrow{\cdot 1.000} \text{cm}^3 \xrightarrow{\cdot 1.000} \text{mm}^3$$

$$\text{km}^3 \xleftarrow{: 1.000} \text{hm}^3 \xleftarrow{: 1.000} \text{dam}^3 \xleftarrow{: 1.000} \mathbf{m^3} \xleftarrow{: 1.000} \text{dm}^3 \xleftarrow{: 1.000} \text{cm}^3 \xleftarrow{: 1.000} \text{mm}^3$$

5 **Si cada cubo  tiene un volumen de 1 cm³, calcula el volumen de las figuras.**



6 **Completa.**

a) 69 m³ = ... dm³	e) 53 dam³ = ... m³	i) 0,38 km³ = ... hm³
b) 7.209 mm³ = ... cm³	f) 0,34 cm³ = ... mm³	j) 901 dm³ = ... m³
c) 1 hm³ = 1.000	g) 1 m³ = 1.000	k) .... = 1.000.000 m³
d) 1 dm³ = 1.000	h) 1.000.000 mm³ = 1	l) 1.000 .... = ... m³

7 **Ordena, de menor a mayor (<), las siguientes unidades. Toma como referencia el metro cúbico (m³) y transforma todas las unidades de medida en esta.**

5.400 m³ – 39.291.476 mm³ – 34 m³ – 0,23 hm³ – 0,5 dam³ – 1.590 dm³ – 2,01 hm³ – 6.120.000 cm³

12 OBJETIVO 2
RELACIONAR LAS UNIDADES DE VOLUMEN, CAPACIDAD Y MASA

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

UNIDADES DE CAPACIDAD

- El **litro** es la unidad principal de capacidad. Abreviadamente se escribe ℓ.
- Los múltiplos (unidades mayores) y submúltiplos (unidades menores) del litro son:

MÚLTIPLOS DEL LITRO				UNIDAD PRINCIPAL	SUBMÚLTIPLOS DEL LITRO		
10.000 ℓ mirialitro mal	1.000 ℓ kilolitro kl	100 ℓ hectolitro hl	10 ℓ decalitro dal	**litro** **ℓ**	0,1 ℓ decilitro dl	0,01 ℓ centilitro cl	0,001 ℓ mililitro ml

UNIDADES DE MASA

- El **kilogramo** y el **gramo** son las unidades principales de masa. Abreviadamente se escriben **kg** y **g**.
- Los múltiplos (unidades mayores) y submúltiplos (unidades menores) del gramo son:

MÚLTIPLOS DEL GRAMO				UNIDAD PRINCIPAL	SUBMÚLTIPLOS DEL GRAMO		
10.000 g miriagramo mag	1.000 g kilogramo kg	100 g hectogramo hg	10 g decagramo dag	**gramo** **g**	0,1 g decigramo dg	0,01 g centigramo cg	0,001 g miligramo mg

- Para medir masas de grandes objetos se utilizan estas unidades.

UNIDADES	SÍMBOLO	EQUIVALENCIA (kg)	EQUIVALENCIA (g)
Tonelada métrica	t	1.000 kg	1.000.000 g
Quintal métrico	q	100 kg	100.000 g

1 **Completa la tabla de equivalencias de valores de capacidad.**

kl	hl	dal	ℓ	dl	cl	ml
1,5						
				50		
	0,5					
						5.600
		14				

2 **Completa las siguientes tablas de equivalencias de valores de masa.**

a)

t	q	kg	g
2			
			75
	0,5		

b)

kg	g	mg
60		
	325	
		20.000

3 **Un depósito contiene 29 kl 30 hl de agua y otro depósito contiene 31 kl 450 dal. ¿Cuál de ellos contiene más litros de agua?**

4 **Observa los valores de la masa de estos vehículos. Expresa las unidades en kilogramos, y ordénalas de mayor a menor cantidad de masa.**

a) Bicicleta: 7.500 g.

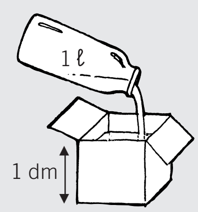
b) Coche: 1.150 kg.

c) Camioneta: 46 q.

d) Furgoneta: 2,3 t.

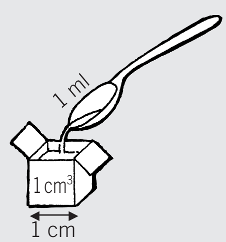
e) Camión: 25,4 t.

- Vertemos una botella de agua de 1 ℓ de capacidad en 1 dm^3, y observamos que cabe exactamente.
  1 litro es el volumen de un cubo que tiene 1 dm de arista, es decir, la capacidad de 1 dm^3.



1 ℓ = 1 dm^3

- Vertemos una cucharilla de agua de 1 ml de capacidad en 1 cm^3, y observamos que cabe exactamente.
  1 mililitro es el volumen de un cubo que tiene 1 cm de arista, es decir, la capacidad de 1 cm^3.



1 ml = 1 cm^3

5 **Expresa en litros.**

a) 345 dm^3 = ... ℓ
b) 200 dal = ... ℓ
c) 950 cm^3 = ... ℓ
d) 0,35 m^3 = ... ℓ
e) 23.000 cm^3 = ... ℓ
f) 0,5 dm^3 = ... ℓ

6 **Expresa en dm^3.**

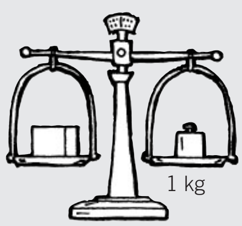
a) 23 ℓ = ... dm^3
b) 20 dl = ... dm^3
c) 5 dal = ... dm^3
d) 0,35 m^3 = ... dm^3
e) 0,255 kl = ... dm^3
f) 53.780 ml = ... dm^3

7 **Una lata de refresco tiene una capacidad de 33 cl; una botella de aceite, una capacidad de 750 ml, y un frasco de jarabe, un volumen de 150 cm^3. Ordena, de menor a mayor capacidad, los objetos anteriores.**

8 **El embalse A tiene un volumen de 0,35 hm^3 y el embalse B tiene una capacidad de 129.000 kl de agua. Expresa ambas unidades en litros y compara la capacidad de los embalses.**

- Un recipiente con 1 litro de agua destilada (ocupa 1 dm^3), al pesarlo en una balanza, se equilibra exactamente con una pesa de 1 kg.
  1 kilogramo es la masa que tiene 1 dm^3 de agua destilada.

1 dm^3 de agua destilada

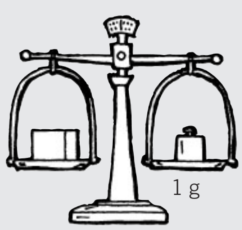


1 kg

Para el agua destilada: **1 kg = 1 ℓ**

- Un recipiente con 1 mililitro de agua destilada (ocupa 1 cm^3), al pesarlo en una balanza, se equilibra exactamente con una pesa de 1 g.
  1 gramo es la masa que tiene 1 cm^3 de agua destilada.

1 cm^3 de agua destilada



1 g

Para el agua destilada: **1 g = 1 cm^3**

Tabla resumen de equivalencias

UNIDADES DE VOLUMEN	m^3	–	–	dm^3	–	–	cm^3
UNIDADES DE CAPACIDAD	kl	hl	dal	ℓ	dl	cl	ml
UNIDADES DE MASA	t	q	mag	kg	hg	dag	g

Para el agua destilada: **1 ℓ = 1 dm^3 = 1 kg**

9 **Responde a las siguientes cuestiones.**

a) ¿Cuántas pesas de 1 kg hacen falta para equilibrar un recipiente con 3 litros de agua? ....

b) ¿Cuántas pesas de 1 g hacen falta para equilibrar un recipiente de 9 cm^3? ....

c) ¿Cuántas pesas de 1 g hacen falta para equilibrar un recipiente de 0,006 dm^3? ....

d) ¿Cuántas pesas de 1 kg hacen falta para equilibrar un recipiente de 0,2 dal? ....

10 **Expresa en kilogramos estas cantidades de agua destilada.**

a) 345 ℓ = ... kg

b) 20 dm^3 = ... kg

c) 0,5 kl = ... kg

d) 3,5 kl = ... kg

e) 3.000 cm^3 = ... kg

f) 0,5 m^3 = ... kg

11 **Expresa en gramos los siguientes volúmenes y capacidades de agua destilada.**

a) 43 ℓ = ... g

b) 7 cm^3 = ... g

c) 0,001 kl = ... g

d) 205 dm^3 = ... g

e) 0,25 cl = ... g

f) 450 ml = ... g

12 **Un depósito de agua contiene 10.000.000 de litros. Calcula.**

a) Su capacidad en m^3.

b) Su capacidad en hectolitros.

c) Si fuera agua destilada, ¿cuál sería su masa en toneladas y en kilogramos?

13 **Dos recipientes contienen una cantidad total de 15 hl de agua. Si uno de ellos contiene 72 dal, halla.**

a) La capacidad de cada recipiente en litros.

b) La masa en kilogramos de cada uno de ellos.

c) El volumen que ocupan en metros cúbicos.

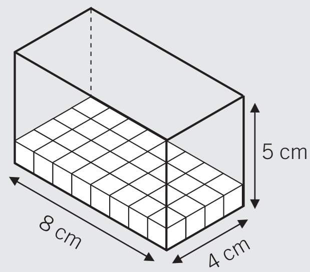
OBJETIVO 3

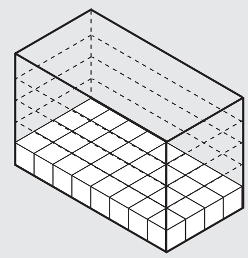
CALCULAR EL VOLUMEN DE ALGUNOS CUERPOS GEOMÉTRICOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

VOLUMEN DE UN ORTOEDRO

- El ortoedro es un prisma cuyas caras son rectángulos.
- Una caja de cerillas, una caja de zapatos, una piscina, un aula, desde un punto de vista geométrico, son ortoedros.

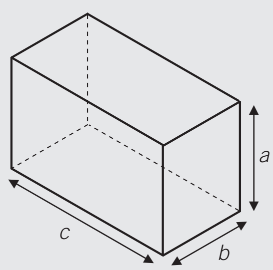




– En el fondo de la caja caben 32 cubitos de 1 cm^3 cada uno $\longrightarrow$ $8 \cdot 4 = 32$ cm^3

– Para llenar la caja hay que colocar 5 filas más de 32 cubitos de 1 cm^3 cada uno $\longrightarrow$ $(8 \cdot 4) \cdot 5 = 160$ cm^3

– El volumen de la caja es 160 cm^3, y contiene 160 cubitos de 1 cm^3 cada uno.



- El volumen del ortoedro es el producto del largo, el ancho y la altura.

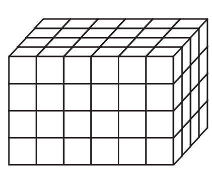
$$\boxed{V = c \cdot b \cdot a}$$

- Como el producto $c \cdot b$ es el área de la base (A_B), podemos afirmar que el volumen del ortoedro se puede expresar como el producto del área de la base por la altura (a en el dibujo y h en las fórmulas generales).

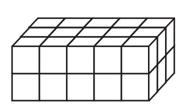
$$\boxed{V = A_B \cdot h}$$

1 **Indica el volumen de los ortoedros en función del número de cubitos de 1 cm^3 que contengan.**

a)

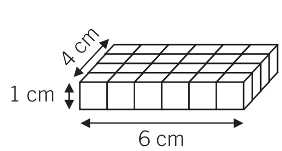


b)

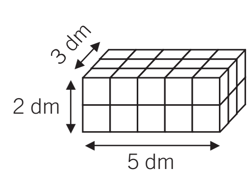


2 **Halla el volumen de los siguientes ortoedros.**

a)

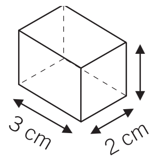


b)

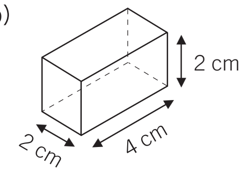


3 **Obtén el volumen de los ortoedros. Expresa los resultados en cm^3 y en dm^3.**

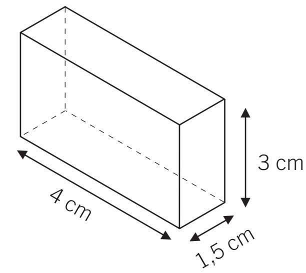
a)



b)

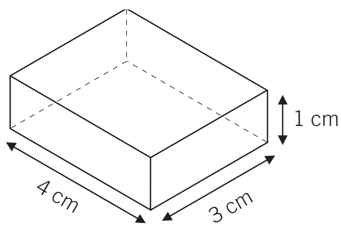


c)

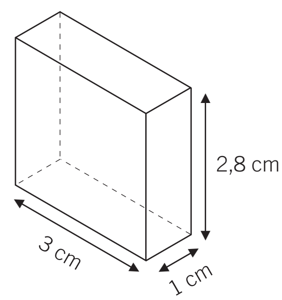


4 **Determina el volumen de los siguientes ortoedros.**

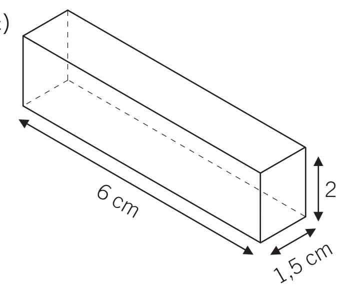
a)



b)

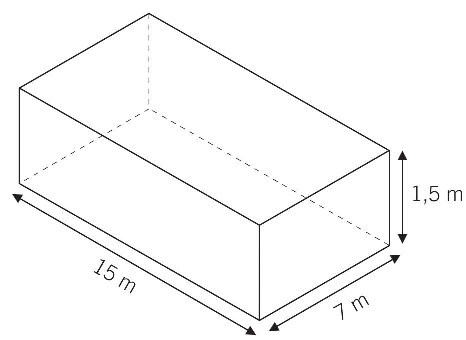


c)



5 **Calcula el volumen de una piscina de dimensiones:**

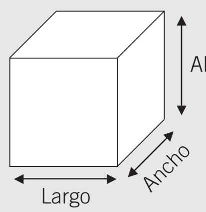
- **Largo: 15 m**
- **Ancho: 7 m**
- **Profundidad: 1,5 m**

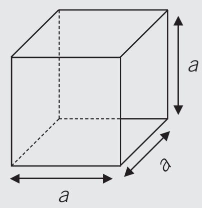


6 **Halla el volumen de un aula cuya área de la base es 40 m^2 y su altura es 2,5 m. Realiza un dibujo representativo.**

VOLUMEN DE UN CUBO

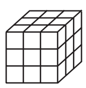
El cubo es un ortoedro que tiene iguales sus tres aristas, largo-ancho-alto.

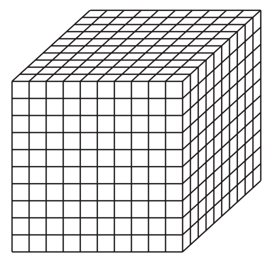




$$V = a \cdot a \cdot a = a^3$$

7 **Indica el volumen de los cubos en función del número de cubitos de 1 cm^3 que contienen.**

a) 

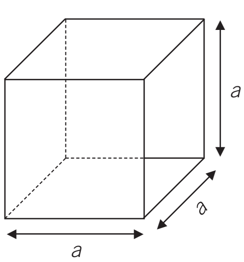
b) 

8 **Calcula el volumen de los siguientes cubos según su arista. Realiza un dibujo representativo y expresa el resultado en dm^3 y m^3.**

a) Arista = 5 cm

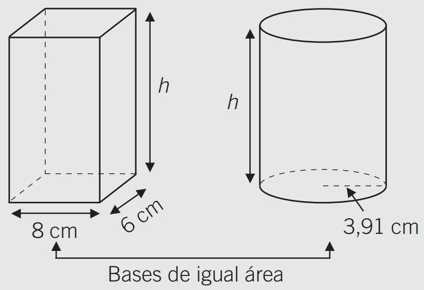
b) Arista = 70 dm

9 **Hemos construido un cubo de cartulina. Se han forrado todas las aristas con 240 cm de cinta adhesiva. ¿Cuánto mide cada arista? ¿Cuál es el volumen del cubo?**



VOLUMEN DE UN CILINDRO

- Observa los siguientes cuerpos geométricos: el ortoedro y el cilindro.
- Tienen la misma altura (*h*) y sus bases tienen la misma área.

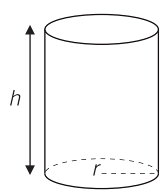


$h = 12$ cm
$A_{B\ \text{Ortoedro}} = \text{largo} \cdot \text{ancho} = 8 \cdot 6 = 48\ \text{cm}^2$
$A_{B\ \text{Cilindro}} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (3{,}91)^2 = 48\ \text{cm}^2$

- Si llenamos el ortoedro con arena fina o agua y lo vaciamos en el cilindro, comprobamos que este se llena.
- Ambos cuerpos tienen el mismo volumen.

$$\boldsymbol{V_{\text{Ortoedro}} = V_{\text{Cilindro}} = A_B \cdot h}$$

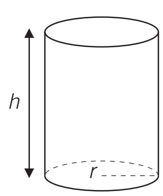
10 **Calcula el volumen de un cilindro que tiene de radio de la base 5 cm y una altura de 8 cm.**



11 **Obtén el volumen de un cilindro, si la base tiene un área de 30 cm^2 y mide 12 cm de altura.**

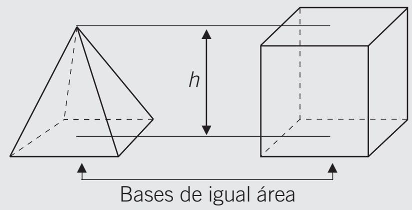
12 **Determina el volumen de un cilindro cuya base es un círculo de 8 cm de diámetro y tiene una altura de 15 cm.**

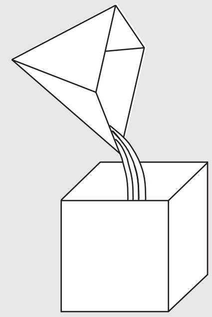
13 **Un depósito de agua tiene forma cilíndrica. El diámetro de la base es 1,8 m y su altura 4,5 m. Calcula el volumen total del depósito y la cantidad de litros que caben en él.**



VOLUMEN DE UNA PIRÁMIDE

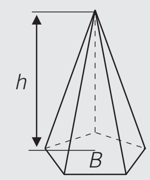
- Observa los siguientes cuerpos geométricos: el ortoedro y la pirámide.
- Tienen la misma altura *h* y la misma área de las bases.



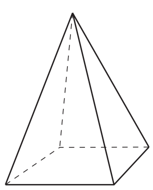


- Si llenamos la pirámide con arena fina o agua y la vaciamos en el prisma, comprobamos que para llenar el prisma se necesitaría el contenido exacto de 3 pirámides.
- El volumen de la pirámide es tres veces menor que el del prisma, es decir, un tercio del área de la base por la altura.

$$V_{\text{Pirámide}} = \frac{V_{\text{Prisma}}}{3} = \frac{A_B \cdot h}{3}$$



14 **Calcula el volumen de una pirámide de 12 cm de altura, si la base es un cuadrado de 4 cm de lado.**



15 **Obtén el volumen de una pirámide de 9 cm de altura cuya base es un rectángulo de 4 cm de largo y 2,5 cm de ancho.**

16 **La pirámide de Keops, en Egipto, es de base cuadrangular. El lado de la base mide 230 m y su altura 160 m. Calcula su volumen total.**